• Επανάληψη Βασικών Εννοιών. 9/10/2019

1) Τυχαίο Πείραμα:

Με τον όρο τυχαίο πείραμα (τ.π.) εννοούμε κάθε φαινόμενο ή διαδικασία η οποία χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό δυνατών παρατηρούμενων αποτελεσμάτων (ενδεχόμενα) και της οποίας διαδικασίας το τελικό αποτέλεσμα δεν μπορεί να προβλεφθεί με βεβαιότητα

2) Δειγματικός Χώρος S ή Ω

Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός τ.π

3) Ενδεχόμενο

καθε υποσύνολο του δ.χ S. κάθε μονοσύνολο ενδεχόμενο θα το λέμε απλό ενδεχόμενο. Τα ενδεχόμενα συνήθως συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα.

$A \cup B$: Ένωση των ενδεχομένων A, B συνίσταται στην πραγματοποίηση τουλάχιστον ενός εκ των A, B.

$A \cap B$: Τομή των ενδεχομένων A, B συνίσταται στην πραγματοποίηση και των 2.

A' ή A^c : Συμπλήρωμα του A, τα στοιχεία του S που δεν ανήκουν στο A.

$\emptyset$: κενό σύνολο, το αδύνατο ενδεχόμενο αυτό που δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί.

$A \cap B = \emptyset$: A, B ξένα

• ΟΡΙΣΜΟΣ σ-Άλγεβρα

Έστω $\mathcal{A}$ το σύνολο όλων των ενδεχομένων που αναφέρονται σε κάποιο δειγματικό χώρο (δ.χ) S. Τότε:

1) $S \in \mathcal{A}$

2) $A \in \mathcal{A}$ τότε $A' \in \mathcal{A}$

3) Αν $A_i \in \mathcal{A}$ τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Μια οικογένεια συνόλων με τις παραπάνω ιδιότητες αποκαλείται σ-άλγεβρα

• ΟΡΙΣΜΟΣ Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Έστω A ένα ενδεχόμενο που αποτελείται από n το πλήθος απλά ενδεχόμενα σε ένα δ.χ S με N το πλήθος ισοπίθανα ενδεχόμενα.

Τότε: $P(A) = \frac{n}{N}$

• ΟΡΙΣΜΟΣ Εμπειρικός Ορισμός Πιθανότητας

$P(A) = \frac{n(A)}{N}$ Σχετική συχνότητα εμφάνισης σε N το πλήθος επαναλήψεις του τ.π. N μεγάλος αριθμός

κάτω από τις ίδιες συνθήκες κάθε φορά.

Αδυναμία Ορισμού: Ο μεγάλος αριθμός επαναλήψεων και οι ίδιες συνθήκες σε κάθε επανάληψη

• ΟΡΙΣΜΟΣ Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας

Εστω $S \neq \emptyset$ δ.χ και $\mathcal{A}$ η σ-άλγεβρα υποσυνόλων του δ.χ. Θεωρούμε την συνολοσυνάρτηση $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Η P λέγεται πιθανότητα ή μέτρο πιθανότητας αν ικανοποιεί τα αξιώματα:

1) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$
2) $P(S) = 1$
3) Αν τα $A_i \in \mathcal{A}$ με $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i,j$

Τότε $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Πχ) 1) νδο $P(\emptyset) = 0$

Απόδειξη

$S \in \mathcal{A} \quad S = S \cup \emptyset$ και $S \cap \emptyset = \emptyset$ άρα ξένα μεταξύ τους

$P(S) = 1 \Leftrightarrow P(S \cup \emptyset) = 1 \Leftrightarrow P(S) + P(\emptyset) = 1 \Leftrightarrow 1 + P(\emptyset) = 1 \Leftrightarrow P(\emptyset) = 0$

2) νδο $P(B-A) = P(B) - P(A) \quad A \subseteq B$

Αποδ

$B = (B-A) \cup A$ και $A \cap (B-A) = \emptyset$

$P(B) = P((B-A) \cup A) = P((B-A)) + P(A) \Leftrightarrow P(B-A) = P(B) - P(A)$

• ΟΡΙΣΜΟΣ Δεσμευμένη Πιθανότητα

Δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου αναφέρεται στην πιθανότητα ενός ενδεχομένου όταν είναι διαθέσιμη μία μερική γνώση σχετική με την έκβαση του Τ.Π.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

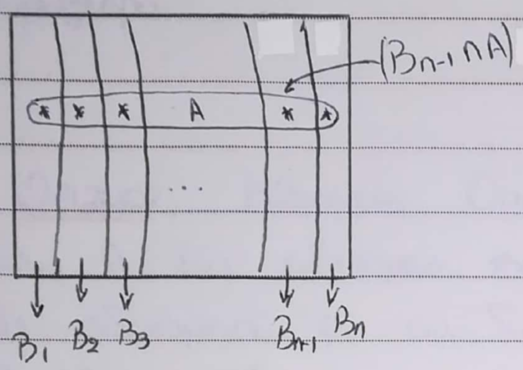
Εφαρμογή του Ορισμού

1) Πολλαπλασιαστικός Τύπος

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1})$$

$P(A_1 \dots A_n) \neq 0$

2) Θεώρημα Ολική Πιθανότητας



Τα $(B_i \cap A) \cup (B_j \cap A) = \emptyset \quad \forall i,j = 1,\dots,n$

$B_1,\dots,B_n$ διαμέριση του B

$$P(A) = P((B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \dots \cup (B_n \cap A)) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

3) Κανόνας του Bayes

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

- **Ορισμός**

Δύο ενδεχόμενα A,B είναι ανεξάρτητα όταν:

α) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

β) $P(A|B) = P(A)$

γ) $P(B|A) = P(B)$

Τα α, β, γ είναι ισοδύναμα.

• Τυχαία Μεταβλητή

Μία συνάρτηση $X: S \to R$ θα λέγεται μεταβλητή αν για κάθε υποσύνολο $B \subseteq R$. Το $X^{-1}(B) = \{s \in S : X(s) \in B\}$ είναι στοιχείο της σ-Άλγεβρα.

Οι τ.μ επιτρέπουν την αντιστοιχεία ενδεχομένων με υποσύνολα της ευθείας γραμμής. Συνήθως συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα και διακρίνονται σε διακριτές τ.μ. αν το σύνολο τιμών τους είναι το πολύ αριθμήσιμο και σε συνεχής τ.μ αν το πεδίο τιμών τους είναι ένα πεπερασμένο ή άπειρο διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών.

• Συνάρτηση κατανομής

Συνάρτηση κατανομής ή Αθροιστική Συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X είναι εκείνη η συνάρτηση που χρησιμοποιείτε για τον υπολογισμό πιθανοτήτων χωρίς να αναγκαζόμαστε να ανατρέχουμε κάθε φορά στον αρχικό δ.χ συμβολίζεται $F_X()$ και είναι μία πραγματική συνάρτηση που ορίζετε ως εξής:

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

• Ιδιότητες:

1) Σύνολο τιμών της F_X είναι το $[0,1]$

2) Είναι μη φθίνουσα

• Διακριτές τ.μ

Στις διακριτές τ.μ. θέλουμε να βρούμε τη συνάρτηση πιθανότητας. Εστω X διακριτή τ.μ. με σύνολο δυνατών τιμών $S_X = \{x_1, x_2, \dots\}$

$$P_X(x_i) = P(X = x_i) \quad \forall i$$

• Ιδιότητες

i) $0 \leq P_X \leq 1$

ii) $\sum P_X(x_i) = 1$

• ΕΙΔΙΚΕΣ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

1) Διωνυμική κατανομή

$X \sim B(n, p)$

p: πιθανότητα επιτυχίας

n: αριθμός δοκιμών του διωνυμικού τ.π.

Αριθμός "επιτυχιών" σε n δοκιμές ενός διωνυμικού τ.π.

$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$

2) Γεωμετρική κατανομή

$X \sim Geo(p)$

Αριθμός δοκιμών ενός διωνυμικού τ.π μέχρι την 1η επιτυχία

$P(X=x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$

3) Αρνητική Διωνυμική κατανομή

$X \sim NB(k, p)$

Αριθμός δοκιμών μέχρι την k επιτυχία ενός διωνυμικού τ.π.

$P(X=x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}, \quad x = k, k+1, \ldots$

4) Poisson κατανομή

$X \sim P(\lambda)$

Αριθμός "αφίξεων" στη μονάδα του χρόνου με ρυθμό αφίξεων λ στη μονάδα του χρόνου.

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \quad x=0,1,2,\ldots$$

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

· ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X μία τ.μ. Η X λέγεται συνεχής αν υπάρχει μία μη αρνητική (ολοκληρωτική) συνάρτηση f_X ορισμένη στο σύνολο $\mathbb{R}$ τ.ω:

$$P(x \in B) = \int_B f_X(x)\,dx$$

Η $f_X(\cdot)$ ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π).

Για να είναι η $f_X(\cdot)$ σ.π.π θα πρέπει:

i) $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x$

ii) $\int_{\Pi.O} f_X(x)\,dx = 1$

· ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

1) Ομοιόμορφη κατανομή

$X \sim U(\alpha, \beta)$ $\quad f_X(x) = \frac{1}{\beta-\alpha}, \quad \alpha < x < \beta$

2) <u>Εκθετική κατανομή</u>

$X \sim Εκθ.(\lambda)$

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x \geq 0$

[χρόνος ζωής
ή
χρόνος μεταξύ
δύο αφίξεων Poisson]

3) <u>Κατανομή Γάμμα</u>

$X \sim G(a, b)$ (χρόνος μέχρι την a άφιξη)

$$f_X(x) = \frac{x^{a-1} e^{-x/b}}{b^a \Gamma(a)}, \quad x \geq 0$$

4) <u>Κατανομή Βήτα</u>

$X \sim Βήτα(a, b)$

$$f_X(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}, \quad 0 < x < 1$$

5) <u>Κανονική κατανομή</u>

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad x \in \mathbb{R}, \ \mu \in \mathbb{R}, \ \sigma^2 > 0$$

• $\mu = 0 \quad \sigma^2 = 1 \longrightarrow$ Τυπική κανονική κατανομή $X \sim N(0,1)$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

6) χ_n^2 με n-βαθμούς ελευθερίας (e,c)

$\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ όπου $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες $N(0,1)$

7) t - κατανομή

$$T = \frac{\overset{\to X \sim N(0,1)}{N(0,1)}}{\underbrace{\sqrt{\chi_n^2/n}}_{Y}}$$ με X, Y ανεξάρτητα

8) F κατανομή

$$F_{n_1,n_2} = \frac{\chi_{n_1}^2/n_1}{\chi_{n_2}^2/n_2}$$ → ανεξάρτητες.

• Μέση Τιμή - Διακύμανση Τ.Μ.

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \sum_x x P(X=x) & X \text{ διακριτή} \\ \int_{\Omega} x f_X(x)\,dx & X \text{ συνεχής Τ.Μ.} \end{cases}$$

$$E(h(X)) = \begin{cases} \sum_x h(x) P(X=x) & X \text{ διακριτή} \\ \int_{\Omega} h(x) f_X(x)\,dx & X \text{ συνεχής Τ.Μ.} \end{cases}$$

$E(c) = c$ c: σταθερά

$E(ah(x)+b) = aE(h(x))+b$

$Var(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

$Var(c) = 0$

$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

• ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑ

$m_X(t) = E(e^{tX}), \ t \in \mathbb{R}$

• Ιδιότητες

i) "Γεννάει" ροπές $E(X^t) \to t$-τάξης

ii) Μοναδικότητα Ροπογεννητριών.